Autor: José Arturo Barreto M.A.

Páginas web:

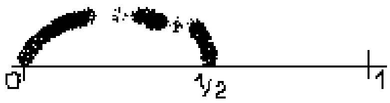
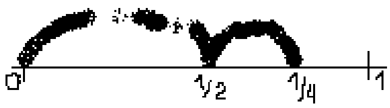
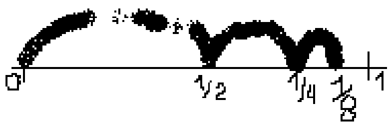
www.abaco.com.ve www.abrakadabra.com.ve www.miprofe.com.ve

Correo electrónico: josearturobarreto@yahoo.com

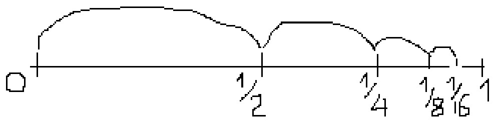
## El concepto de límite

Zenón de Elea (490 A.C) planteó la siguiente paradoja , la cual modificamos tratando de mantener su sentido.

Si una "pulga atómica" debe viajar de 0 a 1, dando saltos de la manera que se describe a continuación, **nunca llegará**.

| | |
|---|---|
|   | n=1<br>Recorrido: $\frac{1}{2}$<br>Falta por recorrer: $\frac{1}{2}$ |
|   | n=2<br>Recorrido: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$<br>Falta por recorrer: $\frac{1}{4}$ |
|   | n=3<br>Recorrido: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$<br>Falta por recorrer: $\frac{1}{8}$ |

En el siguiente salto

| | |
|---|---|
|   | n=4<br><u>Recorrido</u> <u>Falta por recorrer</u><br>$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$ $\frac{1}{16}$ |

En cada salto la "pulga atómica" está obligada a recorrer la mitad del recorrido que le falta. Así su primer salto es de una longitud de $\frac{1}{2}$ , faltándole $\frac{1}{2}$ por recorrer. Por lo cual su próximo salto será de sólo $\frac{1}{4}$ , faltándole sólo $\frac{1}{4}$ por recorrer. Así su próximo salto será de sólo $\frac{1}{8}$ y el siguiente de $\frac{1}{16}$. A medida que se acerca a 1, es obligada a saltar sólo la mitad del recorrido que le falta. Sus próximos saltos serán de $\frac{1}{32},\frac{1}{64}$,etc. La regla general es que el salto n-esimo es de sólo $\frac{1}{2^n}$, faltándole $\frac{1}{2^n}$ por recorrer.

La situación en el salto n es la siguiente:

| <u>Falta por recorrer</u> | <u>Recorrido</u> |
|---|---|
| $\frac{1}{2^n}$ | $1-\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$ |

Podrá llegar de esta manera la "pulga atómica" a su destino ?. La respuesta es: no pero cada vez estará mas cerca y dando suficientes saltos se podrá acercar tanto como quiera.

Es claro que para todo número entero positivo la distancia recorrida $\frac{2^n-1}{2^n}$ es menor que 1 (la distancia total), pero a medida que la pulga continua saltando (cuando n “tiende” a infinito), la distancia del objetivo (el final del camino) que es $\frac{1}{2^n}$, es cada vez menor.

Se dice en este caso, que el límite de $\frac{2^n - 1}{2^n}$ cuando n “tiende” a infinito (n aumenta indefinidamente) es 1 y el límite de $\frac{1}{2^n}$ (la distancia por recorrer) cuando n “tiende” a infinito es 0.

Como se ve, el límite de la expresión $\frac{2^n - 1}{2^n}$, cuando n $\to \infty$ (n “tiende” a infinito) es 1.

Los límites se pueden calcular siguiendo ciertas reglas del cálculo de límites que los matemáticos han “probado” que son ciertas, pero que en este estudio las asumiremos como reglas plausibles, ya que parecen naturales.

Por ejemplo: Aceptando que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, ya que cuando n “tiende” a infinito, entonces $2^n \to \infty$ y por lo tanto $\frac{1}{2^n} \to 0$, obtendríamos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1} = \frac{1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}}{1} = \frac{1-0}{1} = 1$$

Antes de calcular el límite (cuando desaparece la palabra “lim”), hemos simplificado el numerador y el denominador entre $2^n$. Luego hemos sustituido $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

La teoría de límites, en la cual se basan el cálculo diferencial e integral, te parecerá en principio compleja. Poco a poco se te irán haciendo familiares muchos resultados y comenzarás a reconocer su efectividad. Pero cuidado, muchas cosas que te pueden parecer evidentes no lo son tanto y te las damos como verdades y “reglas” para evitarte dolores de cabeza. Hay que aplicar tales reglas con cuidado, de lo contrario podrías llegar a conclusiones sorprendentemente falsas.

Aquí no pretendemos volverte un experto en manejo de los teoremas sobre límites ni en el cálculo de los mismos, sino mas bién ayudarte a que tengas tu propia idea del concepto de límite y sus particularidades.

Te mostraremos como la teoría de límites te podría ayudar a calcular con cierta presición la raiz cuadrada de 2.

Definición: Una sucesión de números es un conjunto infinito de ellos, donde se habla del primero, el segundo, el tercero y así sucesivamente. Los términos de la sucesión se denominan $x_1, x_2, x_3, \ldots$

Generalmente los términos de la sucesión son descritos por una regla, digamos como ejemplo $x_n = n^2$. De donde obtendríamos $x_1 = 1^2 = 1, x_2 = 2^2 = 4, x_3 = 3^2 = 9, x_4 = 4^2 = 16, etc$

Calculo de $\sqrt{2}$.

La raiz cuadrada del número 2, es un número $x$ con la propiedad $x^2 = 2$. Como $1^2 = 1$ y $2^2 = 4$, concluimos que $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$. Aún mas, como $(1{,}4)^2 = 1{,}96$, concluimos que $1{,}4 \leq \sqrt{2} \leq 2$. Como $(1{,}5)^2 = 2{,}25$, concluimos que $1{,}4 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}5$.

La sucesión definida por $x_1 = 1{,}4$ (la primera "aproximación" a $\sqrt{2}$) y luego por la formula "iterativa" (que se aplicará una y otra vez) $x_{n+1} = \dfrac{x_n^{\,2} + 2}{2x_n}$ nos producirá sucesivamente a partir de $x_1 = 1{,}4$, la sucesión de números :

$x_2 = \dfrac{x_1^{\,2} + 2}{2x_1} = \dfrac{(1{,}4)^2 + 2}{2 \cdot 1{,}4} = \dfrac{1{,}96 + 2}{2{,}8} \approx 1{,}414286$. Si calculamos $(1{,}414286)^2 \approx 2{,}000205$, tenemos que $1{,}4 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}414286$, mas sin embargo, "casi" que hemos calculado $\sqrt{2}$.

El "tercer" término de la sucesión según la formula iterativa será

$$x_3 = \frac{x_2^{\,2} + 2}{2x_2} = \frac{(1{,}414286)^2 + 2}{2 \cdot 1{,}414286} \approx \frac{2{,}000205 + 2}{2{,}828572} \approx 1{,}414214$$

Si calculamos $(1{,}414214)^2 \approx 2{,}000002$

Vemos que la sucesión está tendiendo a la raiz cuadrada de 2.

Detrás de la razón de ello está la "teoría" de límites y sus reglas.

Veamos.

Si la sucesión definida por la "iteración" (1) $x_{n+1} = \frac{x_n^{\ 2} + 2}{2x_n}$, tiende a un límite L, es decir si $\lim_{n\to\infty} x_n = L$, aplicando límites a ambos lados de (1), tendríamos:

$L = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n^{\ 2} + 2}{2\lim_{n\to\infty} x_n} = \frac{L^2 + 2}{2L}$. Por lo tanto, pasando $2L$ a multiplicar a L, tendremos:

$2L^2 = L^2 + 2$. Por lo tanto $L^2 = 2$ y por ello $L = \sqrt{2}$. Es decir, que el límite de la sucesión es precisamente $\sqrt{2}$. Es por ello, que a medida que calculemos un nuevo $x_n$ estaremos mas cerca de $\sqrt{2}$.

El siguiente $x_n$, es decir $x_4 = \frac{x_3^{\ 2} + 2}{2x_3} = \frac{(1{,}414214)^2 + 2}{2(1{,}414214)} \approx 1{,}414213562$

Ahora $(1{,}414213562)^2 \approx 1{,}99999999$.

Este es sorprendentemente el número que nos dio una calculadora CASIO FX-82 cuando calculamos con ella "directamente" $\sqrt{2}$. La similitud no es tan sorprendente porque las calculadoras utilizan algoritmos iterativos como el anterior que se basa en el método denominado Newton-Ransom.

Lo maravilloso es que el límite $\sqrt{2}$ como tal nunca se alcanzará, mas sin embargo, podremos acercarnos por este método tanto a la "verdadera" $\sqrt{2}$ como querramos.